1. 要证明一个命题不可证，最简单的方法当然就是证明它的否定了。

假设一个理论是一致的（即不能同时证明一个语句及其否定）。那么如果你证明了一个语句的否定，那么你当然就不可能证明这个语句自己了。

比如在[皮亚诺算术](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%9A%AE%E4%BA%9A%E8%AF%BA%E7%AE%97%E6%9C%AF&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)中你可以证明 '2+2=4'，那么你同时也就证明了皮亚诺算术不能证明'2+2=5'。

2. 你还可以通过构造反模型的方法证明一个命题的不可证性。

根据[一阶逻辑](https://www.zhihu.com/search?q=%E4%B8%80%E9%98%B6%E9%80%BB%E8%BE%91&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)的（强）[可靠性定理](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%8F%AF%E9%9D%A0%E6%80%A7%E5%AE%9A%E7%90%86&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)。假设一阶理论T可以证明命题A，那么所有满足T的模型也都是A的模型。因此我们如果要证明T不能证明A，我们只需要构造一个满足T但是又不满足A的模型。

例如，我们可以构造出满足[欧几里得](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)的前四条公理但不满足平行假设的模型，即是[非欧几何](https://www.zhihu.com/search?q=%E9%9D%9E%E6%AC%A7%E5%87%A0%E4%BD%95&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)，因此欧几里得的前四条公理推不出平行公设。

3. 除了[力迫法](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%8A%9B%E8%BF%AB%E6%B3%95&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)这样的高级方法。如果我们要证明命题逻辑公理系统的某条公理相对于其它公理的独立性，我们可以使用[多值方法](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%A4%9A%E5%80%BC%E6%96%B9%E6%B3%95&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)。

它背后的大致思想是这样的，所有（其它）公理都具有性质P，并且

所有[推理规则](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%8E%A8%E7%90%86%E8%A7%84%E5%88%99&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)的运用都保存性质P，

但是我们想要证明不可证性的命题没有性质P，

所以，该命题不能为这些公理推出来

而多值方法就是这一思路运用的一例。

对于某个命题逻辑系统的公理和某个我们想证明不可证性的命题P而言，尽管它们在[二值](https://www.zhihu.com/search?q=%E4%BA%8C%E5%80%BC&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)的情况下可能都是有效的（即无论给命题变项怎么[赋值](https://www.zhihu.com/search?q=%E8%B5%8B%E5%80%BC&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D" \t "_blank)，它们都取值0，即真）。

现在我们考虑一种有三个值 0, 1, 2 的新的真值表，并且这种[真值表](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%9C%9F%E5%80%BC%E8%A1%A8&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)使得原先的公理都具有某种性质（比如无论对命题变项怎么赋值，它们都取值0）。

但是我们发现，在这种新的[赋值规则](https://www.zhihu.com/search?q=%E8%B5%8B%E5%80%BC%E8%A7%84%E5%88%99&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)下，命题P可能取值2，那么我们就可以说，命题P不能为原先的公理推出来。

例如，我们可以通过多值方法证明当下通用的命题[逻辑公理系统](https://www.zhihu.com/search?q=%E9%80%BB%E8%BE%91%E5%85%AC%E7%90%86%E7%B3%BB%E7%BB%9F&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)P中的每条公理相对于其它几条都是独立的。

4. 在[矢列演算](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%9F%A2%E5%88%97%E6%BC%94%E7%AE%97&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)中，通过逆推分析证明一个公式所需要的条件和能使用的规则，可以发现如排中律在[直觉主义逻辑](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%9B%B4%E8%A7%89%E4%B8%BB%E4%B9%89%E9%80%BB%E8%BE%91&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)中是不可证的；

根岑证明了经典、直觉主义、[最小矢列演算](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%9C%80%E5%B0%8F%E7%9F%A2%E5%88%97%E6%BC%94%E7%AE%97&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)都具有cut-free性质，即任意证明都可以不使用cut规则：

这可以推出[子公式](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%AD%90%E5%85%AC%E5%BC%8F&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)性质：一个证明Γ |- ϕ 具有子公式性质[当且仅当](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%BD%93%E4%B8%94%E4%BB%85%E5%BD%93&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)出现在其中的公式要么是ϕ的子公式，要么属于Γ。

这马上可以得出矛盾（⊥）是不可证明的，因为矛盾没有任何子公式。

从子公式性质和直觉主义的规则中还可以得出，直觉主义逻辑具有析取性质：如果=> A V B 可以推导出，那么=> A 或者 => B。

从析取性质中立马也可以分析出排中律在直觉主义逻辑中是不可证的。

从上也可以知道[双重否定律](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%8F%8C%E9%87%8D%E5%90%A6%E5%AE%9A%E5%BE%8B&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)在直觉主义逻辑中不可证明的。

其它可以证明的如[爆炸律](https://www.zhihu.com/search?q=%E7%88%86%E7%82%B8%E5%BE%8B&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)：=> (A ∧ ¬A) => B 在最小逻辑中也是不可证明的。

5. 证明不可证性还有许多其它方法，除了其ta答主提到的力迫法之外，还有别的另外的[模型论](https://www.zhihu.com/search?q=%E6%A8%A1%E5%9E%8B%E8%AE%BA&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)方法。而除了模型论方法之外，还可以证明某一类函数的增长速度快过一个理论可证递归的任何函数等，[古德斯坦定理](https://www.zhihu.com/search?q=%E5%8F%A4%E5%BE%B7%E6%96%AF%E5%9D%A6%E5%AE%9A%E7%90%86&search_source=Entity&hybrid_search_source=Entity&hybrid_search_extra=%7B%22sourceType%22%3A%22answer%22%2C%22sourceId%22%3A3278964794%7D)类似的命题的不可证性就可以用这后一种方法解答。